DISTRIBUCIONES χ^2, t Y F

JtF I

Observación

En este capítulo se analizarán tres distribuciones que son de importancia crucial en la estimación de parámetros por intervalos de confianza, en las pruebas de hipótesis, en el ajuste de datos, etc, temas que se verán en capítulos subsiguientes.
Este capítulo es pues solo un soporte de lo que se vendrá más tarde, y no existen ejemplos o aplicaciones "directas" de estas distribuciones, las cuales solo cobrarán vigencia al entrar en los temas arriba citados.

JtF II

Distribución χ^2 ("J i" cuadrado)

JtF II.1

a. Sea *n* variables aleatorias independientes $X_1, \ldots, X_n$ todas ellas normales (0 ; 1).
Sea una nueva variable aleatoria:

$$X = X_1^2 + \ldots + X_n^2 \qquad \textbf{[1]}$$

Puede demostrarse (ver H. Cramer "Elementos de la Teoría de las Probabilidades", página 133) que esta variable tiene una f. de d.:

$$f^X(x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ \dfrac{x^{\left(\frac{n}{2}\right)-1} e^{-\frac{x}{2}}}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} & \text{para } x \geq 0 \end{cases} \qquad \textbf{[2]}$$

siendo en general: $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ para $a > 0$.

b. Se dirá que la variable X definida en **[1]** tiene una distribución χ^2 (**J i**-cuadrado) con *n* grados de libertad, lo que se abrevia diciendo que X es una variable χ_n^2, o que tiene una distribución χ_n^2.

c. Puede demostrarse que:

1º. $m_X = n \qquad \sigma_X^2 = 2n \qquad$ **[4]**

2º. Si las variables X e Y son independientes y $\chi_{n_1}^2$ y $\chi_{n_2}^2$ respectivamente, entonces la variable X + Y es $\chi_{n_1+n_2}^2$. **[5]**

d. En la figura JtF II.a se representan las f. de d. de algunas distribuciones χ_n^2.

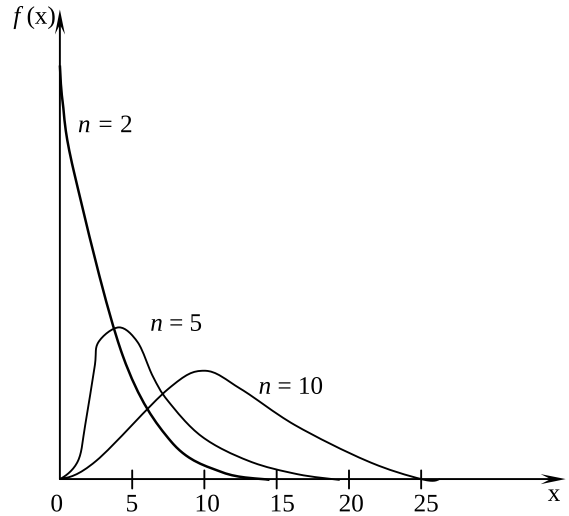

Fig. JtF II.a

Funciones de densidad de probabilidad de varias distribuciones χ^2.

JtF II.2

Si una variable X tiene una distribución χ_n^2, se define que el <u>punto</u> $\chi_{\alpha;n}^2$ es el valor tal que:

$$P(X > \chi_{\alpha;n}^2) = \alpha \qquad \textbf{[6]}$$

En la tabla indicada en la figura JtF II.b se dan valores de $\chi_{\alpha;n}^2$ en función de distintos α y distintos grados de libertad *n*.
A título de ejemplo del uso de esta tabla, sea una variable X que tenga una distribución χ^2 con 10 grados de libertad, y supóngase que interese conocer el valor $\chi_{0,05;10}^2$, es decir el valor tal que:

$$P(X > \chi_{0,05;10}^2) = 0,05$$

En la intersección de la fila correspondiente a 10 en la tabla (10 grados de libertad) y la columna correspondiente a α = 0,05 se encontrará que $\chi_{0,05;10}^2$ = 18,31.

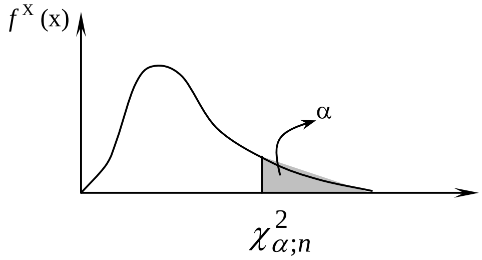

Fig. JtF II.b

Tabla de valores $\chi^2_{\alpha;n}$ tales que

$$P(X > \chi^2_{\alpha;n}) = \alpha$$

cuando X tiene una distribución χ^2 con n grados de libertad

n \ α	.995	.990	.975	.950	.900	.500	.100	.050	.025	.010	.005
1	.00+	.00+	.00+	.00+	.02	.45	2.71	3.84	5.02	6.63	7.88
2	.01	.02	.05	.10	.21	1.39	4.61	5.99	7.38	9.21	10.60
3	.07	.11	.22	.35	.58	2.37	6.25	7.81	9.35	11.34	12.84
4	.21	.30	.48	.71	1.06	3.36	7.78	9.49	11.14	13.28	14.86
5	.41	.55	.863	1.15	1.61	4.35	9.24	11.07	12.83	15.09	16.75
6	.68	.87	1.24	1.64	2.20	5.35	10.65	12.59	14.45	16.81	18.55
7	.99	1.24	1.69	2.17	2.83	6.35	12.02	14.07	16.01	18.48	20.28
8	1.34	1.65	2.18	2.73	3.49	7.34	13.36	15.51	17.53	20.09	21.96
9	1.73	2.09	2.70	3.33	4.17	8.34	14.68	16.92	19.02	21.67	23.59
10	2.16	2.56	3.25	3.94	4.87	9.34	15.99	18.31	20.48	23.21	25.19
11	2.60	3.05	3.82	4.57	5.58	10.34	17.28	19.68	21.92	24.72	26.76
12	3.07	3.57	4.40	5.23	6.30	11.34	18.55	21.03	23.34	26.22	28.30
13	3.57	4.11	5.01	5.89	7.04	12.34	19.81	22.36	24.74	27.69	29.82
14	4.07	4.66	5.63	6.57	7.79	13.34	21.06	23.68	26.12	29.14	31.32
15	4.60	5.23	6.27	7.26	8.55	14.34	22.31	25.00	27.49	30.58	32.80
16	5.14	5.81	6.91	7.96	9.31	15.34	23.54	26.30	28.85	32.00	34.27
17	5.70	6.41	7.56	8.67	10.09	16.34	24.77	27.59	30.19	33.41	35.72
18	6.26	7.01	8.23	9.39	10.87	17.34	25.99	28.87	31.53	34.81	37.16
19	6.84	7.63	8.91	10.12	11.65	18.34	27.20	30.14	32.85	36.19	38.58
20	7.43	8.26	9.59	10.85	12.44	19.34	28.41	31.41	34.17	37.57	40.00
21	8.03	8.90	10.28	11.59	13.24	20.34	29.62	32.67	35.48	38.93	41.40
22	8.64	9.54	10.98	12.34	14.04	21.34	30.81	33.92	36.78	40.29	42.80
23	9.26	10.20	11.69	13.09	14.85	22.34	32.01	35.17	38.08	41.64	44.18
24	9.89	10.86	12.40	13.85	15.66	23.34	33.20	36.42	39.36	42.98	45.56
25	10.52	11.52	13.12	14.61	16.47	24.34	34.28	37.65	40.65	44.31	46.93
26	11.16	12.20	13.84	15.38	17.29	25.34	35.56	38.89	41.92	45.64	48.29
27	11.81	12.88	14.57	16.15	18.11	26.34	36.74	40.11	43.19	46.96	49.65
28	12.46	13.57	15.31	16.93	18.94	27.34	37.92	41.34	44.46	48.28	50.99
29	13.12	14.26	16.05	17.71	19.77	28.34	39.09	42.56	45.72	49.59	52.34
30	13.79	14.95	16.79	18.49	20.60	29.34	40.26	43.77	46.98	50.89	53.67
40	20.71	22.16	24.43	26.51	29.05	39.34	51.81	55.76	59.34	63.69	66.77
50	27.99	29.71	32.36	34.76	37.69	49.33	63.17	67.50	71.42	76.15	79.49
60	35.53	37.48	40.48	43.19	46.46	59.33	74.40	79.08	83.30	88.38	91.95
70	43.28	45.44	48.76	51.74	55.33	69.33	85.53	90.53	95.02	100.42	104.22
80	51.17	53.54	57.15	60.39	64.28	79.33	96.58	101.88	106.63	112.33	116.32
90	59.20	61.75	65.65	69.13	73.29	89.33	107.57	113.14	118.14	124.12	128.30
100	67.33	70.06	74.22	77.93	82.36	99.33	118.50	124.34	129.56	135.81	140.17

JtF III

<u>Teorema</u> (muy importante)

Sean $X_1, ..., X_n$ variables aleatorias normales e independientes, todas con un mismo valor medio *m* y una misma varianza σ^2.
Sean las variables aleatorias $\overline{X}$ y S^2 definidas según las siguientes expresiones:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \qquad\qquad S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Puede demostrarse (ver H. Cramer "Elementos de la Teoría de las Probabilidades", págs 208 – 212) que:

1º. La variable $\dfrac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$ tiene una distribución normal (0 ; 1).

2º. La variable $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2_{n-1} (distribución χ^2 con n – 1 grados de libertad).

3º. Las variables $\dfrac{\overline{X} - m}{\sigma / \sqrt{n}}$ y $\dfrac{nS^2}{\sigma^2}$ son independientes.

JtF IV

<u>Distribución t de Student</u>

JtF IV.1

a. Sean Y y Z variables aleatorias independientes. Supóngase que Y sea normal (0 , 1) y que Z sea χ^2_n, es decir que tenga una distribución χ^2 con *n* grados de libertad.
Sea la variable:

$$T = \sqrt{n}\,\frac{Y}{\sqrt{Z}} \qquad \textbf{[1]}$$

donde la raíz cuadrada toma siempre el signo positivo.
Puede demostrarse (ver H. Cramer "Elementos de la Teoría de las Probabilidades", página 135) que esta variable tiene una f. de d.:

$$f_n^T(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi \ n}\,\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\frac{1}{\left(1+\frac{x^2}{n}\right)^{\frac{n+1}{2}}} \quad ; \quad -\infty < x < \infty \qquad \textbf{[2]}$$

b. Se dirá que esta variable T <u>tiene una distribución t de Student</u> con *n* grados de libertad, lo que se abrevia diciendo que T es una variable t_n.

En la figura JtF IV.a se han representado las f de d de algunas distribuciones t_n.

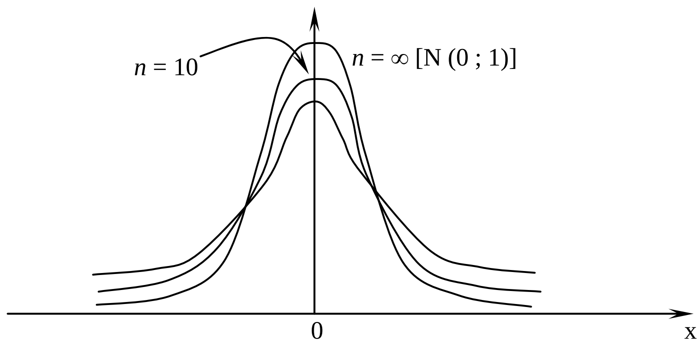

Fig. JtF IV.a

Funciones de densidad de probabilidad de varias distribuciones t.

En este gráfico puede observarse que las f. de d. allí representadas son simétricas con respecto a x = 0, lo cual era dable esperar visto y considerando el integrando **[2]**, y que sus apariencias son bastante similares a la de la f. de d. de la distribución normal (0 ; 1), a la que se van aproximando a medida que aumenta *n*, pudiendo demostrarse que:

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{\mathrm{T}}(\mathrm{x}) = f_{\mathrm{N}(0;1)}(\mathrm{x}) \qquad \textbf{[3]}$$

c. Puede probarse que: $m_{\mathrm{T}} = 0$

d. Si una variable T tiene una distribución t_n se define que el <u>punto</u> $t_{\alpha\,;\,n}$ es el valor tal que:

$$P(T > t_{\alpha\,;\,n}) = \int_{t_{\alpha,n}}^{\infty} f^{\mathrm{T}}(x)dx = \alpha$$

En la tabla indicada en la figura JtF IV.b se dan valores de $t_{\alpha\,,\,n}$ en función de distintos α y distintos grados de libertad *n*.
A título de ejemplo del uso de esta tabla:
Sea una variable T que tiene una distribución t_{10}, es decir una distribución t con 10 grados de libertad.
Supóngase que interese conocer el valor $t_{0,05\,;\,10}$, es decir el valor tal que:

$$P(T > t_{0,05\,;\,10}) = 0,05$$

En la intersección de la columna correspondiente a *n* = 10 (10 grados de libertad) y α = 0,05 se encontrará que $t_{0,05\,;\,10} = 1,812$.

e. Observaciones:

1º. En la tabla antedicha, comparando las filas *n* = 30 y *n* = ∞ (distribución normal) puede verse que las diferencias para un mismo α son pequeñas.
Es por este motivo que en la práctica a menudo se supone que a partir de *n* = 30 la distribución de la variable T es aproximadamente normal.

2º. Puesto que la distribución t es simétrica con respecto a cero, se tiene que:

$$P(T < -t_{\alpha\,;\,n}) = P(T > t_{\alpha\,;\,n}) \qquad \textbf{[4]}$$

3º. Notar que en la f. de d. de una distribución t no figura para nada la varianza de la variable aleatoria correspondiente.

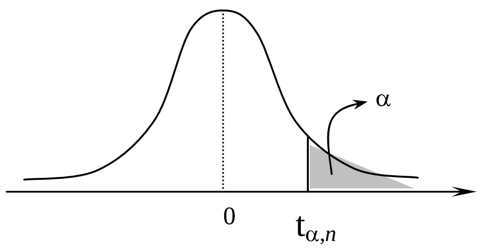

Fig. JtF IV.b
Tabla de valores $t_{\alpha,n}$ tales que:

$$P(T > t_{\alpha,n}) = \alpha$$

cuando T tiene una distribución t de Student con *n* grados de libertad.

n \ α	.40	.25	.10	.05	.025	.01	.005	.0025	.001	.0005
1	.325	1.000	3.078	6.314	12.706	31.821	63.657	127.32	318.31	636.62
2	.289	.816	1.886	2.920	4.303	6.965	9.925	14.089	23.326	31.598
3	.277	.765	1.638	2.353	3.182	4.541	5.841	7.453	10.213	12.924
4	.271	.741	1.533	2.132	2.776	3.747	4.604	5.598	7.173	8.610
5	.267	.727	1.476	2.015	2.571	3.365	4.032	4.773	5.893	6.869
6	.265	.718	1.440	1.943	2.447	3.143	3.707	4.317	5.208	5.959
7	.263	.711	1.415	1.895	2.365	2.998	3.499	4.029	4.785	5.408
8	.262	.706	1.397	1.860	2.306	2.896	3.355	3.833	4.501	5.041
9	.261	.703	1.383	1.833	2.262	2.821	3.250	3.690	4.297	4.781
10	.260	.700	1.372	1.812	2.228	2.764	3.169	3.581	4.144	4.587
11	.260	.697	1.363	1.796	2.201	2.718	3.106	3.497	4.025	4.437
12	.259	.695	1.356	1.782	2.179	2.681	3.055	3.428	3.930	4.318
13	.259	.694	1.350	1.771	2.160	2.650	3.012	3.372	3.852	4.221
14	.258	.692	1.345	1.761	2.145	2.624	2.977	3.326	3.787	4.140
15	.258	.691	1.341	1.753	2.131	2.602	2.947	3.286	3.733	4.073
16	.258	.690	1.337	1.746	2.120	2.583	2.921	3.252	3.686	4.015
17	.257	.689	1.333	1.740	2.110	2.567	2.898	3.222	3.646	3.965
18	.257	.688	1.330	1.734	2.101	2.552	2.878	3.197	3.610	3.922
19	.257	.688	1.328	1.729	2.093	2.539	2.861	3.174	3.579	3.883
20	.257	.687	1.325	1.725	2.086	2.528	2.845	3.153	3.552	3.850
21	.257	.686	1.323	1.721	2.080	2.518	2.831	3.135	3.527	3.819
22	.256	.686	1.321	1.717	2.074	2.508	2.819	3.119	3.505	3.792
23	.256	.685	1.319	1.714	2.069	2.500	2.807	3.104	3.485	3.767
24	.256	.685	1.318	1.711	2.064	2.492	2.797	3.091	3.467	3.745
25	.256	.684	1.316	1.708	2.060	2.485	2.787	3.078	3.450	3.725
26	.256	.684	1.315	1.706	2.056	2.479	2.779	3.067	3.435	3.707
27	.256	.684	1.314	1.703	2.052	2.473	2.771	3.057	3.421	3.690
28	.256	.683	1.313	1.701	2.048	2.467	2.763	3.047	3.408	3.674
29	.256	.683	1.311	1.699	2.045	2.462	2.756	3.038	3.396	3.659
30	.256	.683	1.310	1.697	2.042	2.457	2.750	3.030	3.385	3.646
40	.255	.681	1.303	1.684	2.021	2.423	2.704	2.971	3.307	3.551
60	.254	.679	1.296	1.671	2.000	2.390	2.660	2.915	3.232	3.460
120	.254	.677	1.289	1.658	1.980	2.358	2.617	2.860	3.160	3.373
∞	.253	.674	1.282	1.645	1.960	2.326	2.576	2.807	3.090	3.291

JtF IV.2

Por la definición dada en **[1]** y por lo visto en JtF III se tiene que siendo las variables $X_1, ..., X_n$ todas normales (m , σ) resulta que:

$$\mathrm{T} = \sqrt{n-1}\,\frac{\dfrac{\overline{\mathrm{X}}-m}{\sigma/\sqrt{n}}}{\sqrt{\dfrac{n\mathrm{S}^2}{\sigma^2}}} = \sqrt{n-1}\,\frac{\overline{\mathrm{X}}-m}{\mathrm{S}} \qquad \textbf{[5]}$$

tiene una distribución t con (n – 1) grados de libertad.

JtF IV.3

Sean $X_1, ..., X_{n_X}$ variables aleatorias normales (m_X , σ).
Sean $Y_1, ..., Y_{n_Y}$ variables aleatorias normales (m_Y , σ).
(Notar que las variables X y las Y tienen todas la misma desviación típica).
Sean $X_1, ..., X_{n_X}$, $Y_1, ..., Y_{n_Y}$ todas independientes entre sí.
Sean:

$$\overline{\mathrm{X}} = \frac{1}{n_\mathrm{X}}\sum_{i=1}^{n_X}\mathrm{X}_i \qquad \mathrm{S}_\mathrm{X}^2 = \frac{1}{n_\mathrm{X}}\sum_{i=1}^{n_\mathrm{X}}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2$$

$$\overline{\mathrm{Y}} = \frac{1}{n_\mathrm{Y}}\sum_{i=1}^{n_\mathrm{Y}}\mathrm{Y}_i \qquad \mathrm{S}_\mathrm{Y}^2 = \frac{1}{n_\mathrm{Y}}\sum_{i=1}^{n_\mathrm{Y}}(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})^2$$

Evidentemente:

$$m_{\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{Y}}} = m_{\overline{\mathrm{X}}} - m_{\overline{\mathrm{Y}}} = m_\mathrm{X} - m_\mathrm{Y}$$

Por ser $\sigma_\mathrm{X}^2 = \sigma_\mathrm{Y}^2 = \sigma^2$

$$\sigma_{\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{Y}}}^2 = \sigma_{\overline{\mathrm{X}}}^2 + \sigma_{\overline{\mathrm{Y}}}^2 = \frac{\sigma_\mathrm{X}^2}{n_\mathrm{X}} + \frac{\sigma_\mathrm{Y}^2}{n_\mathrm{Y}} = \sigma^2\left(\frac{1}{n_\mathrm{X}}+\frac{1}{n_\mathrm{Y}}\right) \Rightarrow \sigma_{\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{Y}}} = \sigma\sqrt{\frac{1}{n_\mathrm{X}}+\frac{1}{n_\mathrm{Y}}}$$

y por lo tanto la variable:

$$\frac{\left(\overline{\mathrm{X}}-\overline{\mathrm{Y}}\right)-(m_\mathrm{X}-m_\mathrm{Y})}{\sigma\sqrt{\dfrac{1}{n_\mathrm{X}}+\dfrac{1}{n_\mathrm{Y}}}} \quad \text{es normal } (0\ ,\ 1) \qquad \textbf{[6]}$$

Por otra parte (ver JtF III):

$\frac{n_X S_X^2}{\sigma_X^2} = \frac{n_X S_X^2}{\sigma^2}$ tiene una distribución χ^2 con $n_X - 1$ grados de libertad.

$\frac{n_Y S_Y^2}{\sigma_Y^2} = \frac{n_Y S_Y^2}{\sigma^2}$ tienen una distribución χ^2 con $n_Y - 1$ grados de libertad.

Estas dos variables son independientes por serlo las $X_1, \ldots, X_{n_X}$, $Y_1, \ldots, Y_{n_Y}$, y entonces por lo indicado en **[5]** de JtF II se tiene que:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{n_X S_X^2}{\sigma^2} + \frac{n_Y S_Y^2}{\sigma^2} = \frac{1}{\sigma^2}(n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2) \text{ tiene una distribución} \\ \chi^2 \text{ con } (n_X - 1) + (n_Y - 1) = n_X + n_Y - 2 \text{ grados de libertad.}\end{array}\right\} \quad \textbf{[7]}$$

Como puede demostrarse que las variables indicadas en **[6]** y **[7]** son independientes se tiene por **[1]** que:

$$\left.\begin{array}{l}T = \sqrt{n_X + n_Y - 2}\,\dfrac{\dfrac{(\overline{X} - \overline{Y}) - (m_X - m_Y)}{\sqrt{\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}}}}{\sqrt{n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2}} = \\ \quad = \sqrt{\dfrac{(n_X + n_Y - 2)}{(n_X S_X^2 + n_Y S_Y^2)\left(\dfrac{1}{n_X} + \dfrac{1}{n_Y}\right)}}\left[(\overline{X} - \overline{Y}) - (m_X - m_Y)\right]\end{array}\right\} \quad \textbf{[8]}$$

tiene una distribución t de Student con $n_X + n_Y - 2$ grados de libertad.

JtF V

Distribución F de Snedecor

a. Sean las variables independientes X e Y cuyas distribuciones sean respectivamente $\chi^2_{n_1}$ y $\chi^2_{n_2}$, es decir χ^2 con n_1 y n_2 grados de libertad respectivamente. Sea la variable:

$$Z = \frac{\frac{X}{n_1}}{\frac{Y}{n_2}} \qquad \textbf{[1]}$$

Puede probarse (ver Métodos Matemáticos de la Estadística, pág. 276 de H. Cramer, donde figura una demostración detallada) que la función de densidad de la variable Z es:

$$f^{Z}(z) = \frac{\Gamma\left(\frac{n_1+n_2}{2}\right)\left(\frac{n_1}{n_2}\right)^{\frac{n_1}{2}} z^{\frac{n_1}{2}-1}}{\Gamma\left(\frac{n_1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n_2}{2}\right)\left[\left(\frac{n_1}{n_2}\right)z+1\right]^{\frac{n_1+n_2}{2}}} \qquad 0 < z < \infty \qquad \textbf{[2]}$$

Se dirá que a la variable Z corresponde una distribución F con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 grados de libertad en el denominador, lo que generalmente se abrevia diciendo que Z es una variable F_{n_1,n_2}, o que tiene una distribución F_{n_1,n_2}.

b. Si una variable Z tiene una distribución F_{n_1,n_2} se define que el punto f_{α,n_1,n_2} es el valor tal que:

$$P(Z > \alpha) = \int_{f_{\alpha,n_1,n_2}}^{\infty} f^{Z}(z)\, dz = \alpha \qquad \textbf{[3]}$$

En las tablas indicadas en las figuras JtF V.a y JtF V.b se dan para $\alpha = 0{,}01$ y $\alpha = 0{,}05$ respectivamente, valores de f_{α,n_1,n_2} en función de n_1 y n_2.

Así por ejemplo $f_{0,05\,;\,5\,;\,10} = 3{,}33$ y $f_{0,01\,;\,5\,;\,10} = 5{,}64$.

c. Se hace notar que:

$$f_{(1-\alpha),n_1,n_2} = \frac{1}{f_{\alpha,n_1,n_2}} \qquad \textbf{[4]}$$

Fig. JtF V.a

Tabla de valores $f_{0,01,n_1,n_2}$ tales que P(X > $f_{0,01,n_1,n_2}$) = 0,01 cuando X tiene una distribución F con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 grados de libertad en el denominador.

	n_1	Grados de libertad del numerador																		
n_2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
Grados de libertad del denominador	1	4052	4999.5	5403	5625	5764	5859	5928	5982	6022	6056	6106	6157	6209	6235	6261	6287	6313	6339	6366
	2	98.50	99.00	99.17	99.25	99.30	99.33	99.36	99.37	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.47	99.48	99.49	99.50
	3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.35	27.23	27.05	26.87	26.69	26.00	26.50	26.41	26.32	26.22	26.13
	4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.56	13.46
	5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.11	9.02
	6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.97	6.88
	7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.74	5.65
	8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.95	4.46
	9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.40	4.31
	10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.00	3.91
	11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.69	3.60
	12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.45	3.36
	13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.25	3.17
	14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.09	3.00
	15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.36	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.96	2.87
	16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.84	2.75
	17	8.40	6.11	5.18	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.75	2.65
	18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.66	2.57
	19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.58	2.59
	20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.52	2.42
	21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.46	2.36
	22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.40	2.31
	23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.35	2.26
	24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.31	2.21
	25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.27	2.17
	26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.23	2.13
	27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.20	2.10
	28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.17	2.06
	29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.14	2.03
	30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.11	2.01
	40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.92	1.80
	60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.73	1.60
	120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.53	1.38
	∞	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.32	1.00

Fig. JtF V.b

Tabla de valores $f_{0{,}05,n_1,n_2}$ tales que P(X > $f_{0{,}05,n_1,n_2}$) = 0,05 cuando X tiene una distribución F con n_1 grados de libertad en el numerador y n_2 grados de libertad en el denominador.

	n_1	Grados de libertad del numerador																		
n_2		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	120	∞
Grados de libertad del denominador	1	161.4	199.5	215.7	224.6	230.2	234.0	236.8	238.9	240.5	241.9	243.9	245.9	248.0	249.1	250.1	251.1	252.2	253.3	254.3
	2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	19.38	19.40	19.41	19.41	19.43	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49	19.50
	3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55	8.53
	4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66	5.63
	5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	3.50	4.46	4.43	4.40	4.36
	6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70	3.67
	7	5.59	4.74	4.35	4.12	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68	3.64	3.57	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27	3.23
	8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97	2.93
	9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75	2.71
	10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2.66	2.62	2.58	2.54
	11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45	2.40
	12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34	2.30
	13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25	2.21
	14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.22	2.18	2.13
	15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59	2.54	2.48	2.40	2.33	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11	2.07
	16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54	2.39	2.42	2.35	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06	2.01
	17	4.45	3.59	3.20	2.96	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01	1.96
	18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97	1.92
	19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42	2.38	2.31	2.23	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93	1.88
	20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39	2.35	2.28	2.20	2.12	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90	1.84
	21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87	1.81
	22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34	2.30	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.78
	23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81	1.76
	24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.62	2.51	2.42	2.36	2.30	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79	1.73
	25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77	1.71
	26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75	1.69
	27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73	1.67
	28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71	1.65
	29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70	1.64
	30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68	1.62
	40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58	1.51
	60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47	1.39
	120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96	1.91	1.83	1.75	1.66	1.61	1.55	1.55	1.43	1.35	1.25
	∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22	1.00